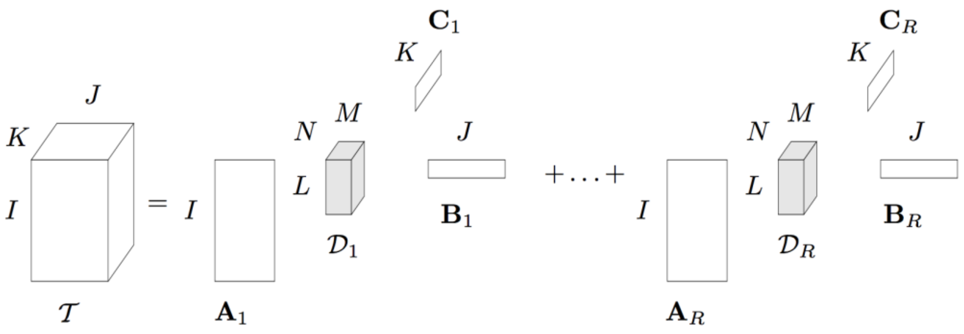
Block-Term Decomposition

Made by: @BuG_17

BTD概述

2008年Lieven De Lathauwer等人提出了Block Term Decomposition（BTD），这种张量分解在一些论文中也被称为Block Component Decomposition (BCD)。

BTD（Block-Term Decomposition）是一种将N阶张量分解为R个成员张量形式的分解，一个$rank-(L_r, M_r, N_r)$的分解如下：



采用数学表达式写为：

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R} \mathcal{D}_r \times_1 \boldsymbol{A}_r \times_2 \boldsymbol{B}_r \times_3 \boldsymbol{C}_r$$

其中，$\mathcal{D}_r$是一个$rank-(L_r, M_r, N_r)$的张量，$\boldsymbol{A}_r \in \mathbb{R}^{I\times L}$是一个秩为$I$的矩阵。

显然，BTD可以看作Tucker分解和CP分解的结合形式。

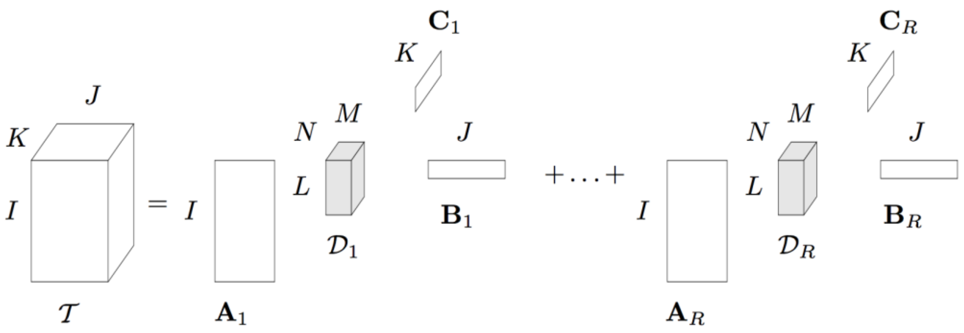
当$R=1$时，成员张量只有一个，此时这个分解就是$rank-(L, M, N)$的Tucker分解。

而当每一个成员张量都是秩1张量（$rank-1$分解）时，BTD退化为CP分解，即将一个张量分解为R个秩1张量。

这说明了BTD具有很强的泛化能力。

BTD概述

BTD（Block-Term Decomposition）是一种将N阶张量分解为R个成员张量形式的分解，一个$rank-(L_r,M_r,N_r)$的分解如下：



采用数学表达式写为：

$$\mathcal{T}=\sum_{r=1}^{R}\mathcal{D}_r\times_1 \boldsymbol{A}_r\times_2 \boldsymbol{B}_r\times_3 \boldsymbol{C}_r$$

其中，$\mathcal{D}_r$是一个$rank-(L_r,M_r,N_r)$的张量，$\boldsymbol{A}_r\in\mathbb{R}^{I\times L}$是一个秩为I的矩阵。

对于矩阵，列秩和行秩是相等的。而且，它们等于矩阵可以分解的秩1项的最小个数。这是矩阵可以通过在列空间和行空间中的基变换对角化的结果。

另一方面，张量通常不能通过模1、模2和模3向量空间中的基变换来对角化。这就导致了mode-n rank三元组和张量rank的区别。有趣的是，高阶张量的“秩”实际上是两个方面的结合：应该指定块的数量，以及它们的大小。

特殊的BTD

前文已经介绍，CP分解和Tucker分解是BTD的两种特殊形式。下面从几种特殊的BTD详细介绍Block Term Decomposition.

仍以三阶张量$\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{I\times J\times K}$为例，定义：

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_R]$$
$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_R]$$
$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{C}_1, \ldots, \boldsymbol{C}_R]$$

- $rank - (L_r, L_r, 1)$分解

当每个成员张量退化为$L_r \times L_r$矩阵时，可以得到$rank - (L_r, L_r, 1)$分解，即：

DEFINITION 2.2. *A decomposition of a tensor* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^{I\times J\times K}$ in a sum of rank-$(L_r, L_r, 1)$ terms, $1 \leqslant r \leqslant R$, *is a decomposition of* $\mathcal{T}$ *of the form*

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R} \mathbf{E}_r \circ \mathbf{c}_r, \tag{2.2}$$

in which the $(I \times J)$ *matrix* $\mathbf{E}_r$ *is rank-*L_r, $1 \leqslant r \leqslant R$.

将$\boldsymbol{E}_r$分解为$\boldsymbol{A}_r \cdot \boldsymbol{B}_r^T$的形式，其中，$\boldsymbol{A}_r \in \boldsymbol{K}^{I\times L_r}$，$\boldsymbol{B}_r \in \boldsymbol{K}^{J\times L_r}$，都是秩为$L_r$的矩阵，$r = 1, \ldots, R$. 则将分解写为：

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R} (\mathbf{A}_r \cdot \mathbf{B}_r^T) \circ \mathbf{c}_r.$$

令：

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_R]$$
$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_R]$$
$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_R]$$

以张量的矩阵展开形式表示该分解，为：

$$\mathbf{T}_{IJ\times K} = [(\mathbf{A}_1 \odot_c \mathbf{B}_1)\mathbf{1}_{L_1} \quad \ldots \quad (\mathbf{A}_R \odot_c \mathbf{B}_R)\mathbf{1}_{L_R}] \cdot \mathbf{C}^T,$$
$$\mathbf{T}_{JK\times I} = (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}^T,$$
$$\mathbf{T}_{KI\times J} = (\mathbf{C} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}^T.$$

特殊的BTD

以张量的slices形式表示该分解，为：

$$\mathbf{T}_{J\times K,i} = \mathbf{B}\cdot \text{blockdiag}([(\mathbf{A}_1)_{i1} \;\ldots\; (\mathbf{A}_1)_{iL_1}]^T, \ldots, [(\mathbf{A}_R)_{i1} \;\ldots\; (\mathbf{A}_R)_{iL_R}]^T)\cdot \mathbf{C}^T, \quad i = 1,\ldots,I, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{T}_{K\times I,j} = \mathbf{C}\cdot \text{blockdiag}([(\mathbf{B}_1)_{j1} \;\ldots\; (\mathbf{B}_1)_{jL_1}], \ldots, [(\mathbf{B}_R)_{j1} \;\ldots\; (\mathbf{B}_R)_{jL_R}])\cdot \mathbf{A}^T, \quad j = 1,\ldots,J, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{T}_{I\times J,k} = \mathbf{A}\cdot \text{blockdiag}(c_{k1}\mathbf{I}_{L_1\times L_1}, \ldots, c_{kR}\mathbf{I}_{L_R\times L_R})\cdot \mathbf{B}^T, \quad k = 1,\ldots,K. \tag{2.9}$$

分解的唯一性（essentially unique）可以保证，不考虑下面的不确定因素（trivial indeterminacies）：

- 这些$rank-(L_r,L_r,1)$的块项可以被任意排列；
- 矩阵$\boldsymbol{A}_r$可以被右乘一个任意非奇异的矩阵$\boldsymbol{F}_r \in \boldsymbol{K}^{L_r\times L_r}$，只要保证矩阵$\boldsymbol{B}_r$同时也被左乘矩阵$\boldsymbol{F}_r$的逆；
- 同一个$rank-(L_r,L_r,1)$块项的因子的系数可以被任意标定，只要保证这些因子的乘积不变。

特殊的BTD

对表达进行如下的规范：对向量$\boldsymbol{c}_r$扩展（或缩放），使其具有单位长度，对$\boldsymbol{E}_r$进行奇异值分解，使得：$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{A}_r \cdot \boldsymbol{D}_r \cdot \boldsymbol{B}_r^T$，其中，$\boldsymbol{D}_r$为对角矩阵，也可以被解释为$L_r \times L_r \times 1$的张量。则分解式就写为了下面的形式：

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R} \mathbf{D}_r \bullet_1 \mathbf{A}_r \bullet_2 \mathbf{B}_r \bullet_3 \mathbf{c}_r.$$

在表达式中，每一个块项都表示为HOSVD的形式，分解如下图所示：

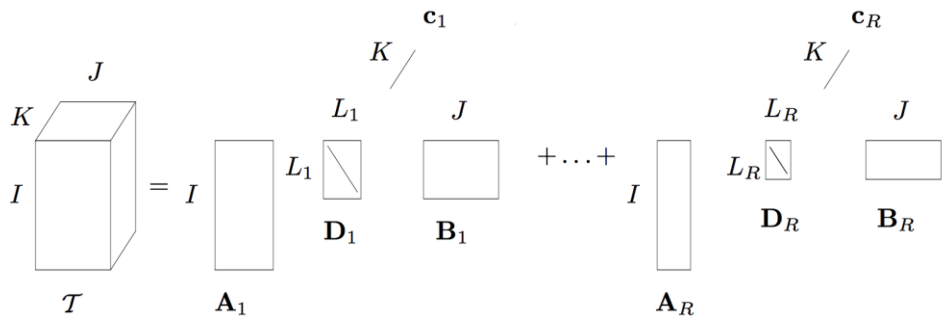
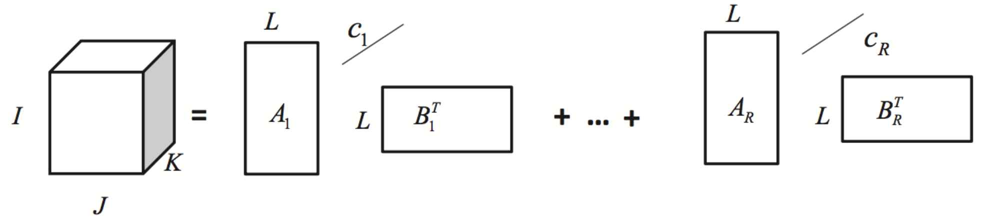


FIG. 2.1. *Visualization of the decomposition of a tensor in a sum of rank-*$(L_r, L_r, 1)$ *terms,* $1 \leqslant r \leqslant R$.

- $rank-(L,L,1)$分解

当$rank-(L_r,L_r,1)$分解的每一个L_r取值为一致，即为L时，可以得到$rank-(L,L,1)$分解，即：



DEFINITION 2.1. *A decomposition of a tensor* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^{I \times J \times K}$ in a sum of rank-$(L,L,1)$ terms *is a decomposition of* $\mathcal{T}$ *of the form*

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R} \mathbf{E}_r \circ \mathbf{c}_r, \tag{2.1}$$

in which the $(I \times J)$ *matrices* $\mathbf{E}_r$ *are rank-*L.

Block Term Decomposition

rank-$(L_r, L_r, 1)$ decomposition.

$$\mathcal{T} = \underbrace{\sum_{r=1}^{R} (\underbrace{A_r \cdot B_r^T}_{\text{rank } L_r\,?}) \circ C_r}$$

or $\displaystyle\sum_{r=1}^{R} \underbrace{\boxed{E_r}}_{\text{rank } L_r.} \circ C_r \longrightarrow$ SVD. $E_r = A_r \cdot D_r \cdot B_r^T$

rank-$(L, L, 1)$ decomposition.

let $L_r = L$.

$$\sum_{r=1}^{R} \underset{I\times L_r.}{A_r} \cdot \underset{L_r\times L_r.}{D_r} \cdot \underset{L_r\times J}{\underbrace{B_r^T}} \circ \underset{K\times 1}{C_r}$$

D_r : $\underset{\sim}{L_r} \times L_r$ matrix

B_r. $J\times L_r$ matrix.

$\xrightarrow{\times_1 A_r (I\times L_r)}$ $\underbrace{D_r \times_1 A_r}_{I\times \underset{\sim}{L_r} \text{ matrix}}$ $\xrightarrow{\times_2 B_r (J\times L_r)}$ $\underbrace{D_r \times_1 A_r \times_2 B_r}_{I\times J \text{ matrix.}}$

or : $\underbrace{I\times J\times 1 \text{ tensor}}$.

take mode 3 into consideration.

$\xrightarrow{\times_3 C_r (K\times 1)}$ T_r. $(I\times J\times K$ tensor$)$

特殊的BTD

- $rank-(L,M,N)$分解

将张量$\boldsymbol{\mathcal{T}}\in \boldsymbol{K}^{I\times J\times K}$表示为一系列$rank-(L,M,N)$张量的和，即为$rank-(L,M,N)$分解。

Definition 2.3. *A decomposition of a tensor* $\mathcal{T}\in\mathbb{K}^{I\times J\times K}$ *in a sum of rank-*(L,M,N) *terms is a decomposition of* $\mathcal{T}$ *of the form*

$$\mathcal{T}=\sum_{r=1}^{R}\mathcal{D}_r\bullet_1\mathbf{A}_r\bullet_2\mathbf{B}_r\bullet_3\mathbf{C}_r, \tag{2.11}$$

in which $\mathcal{D}_r\in\mathbb{K}^{L\times M\times N}$ *are full rank-*(L,M,N) *and in which* $\mathbf{A}_r\in\mathbb{K}^{I\times L}$ *(with* $I\geqslant L$*),* $\mathbf{B}_r\in\mathbb{K}^{J\times M}$ *(with* $J\geqslant M$*), and* $\mathbf{C}_r\in\mathbb{K}^{K\times N}$ *(with* $K\geqslant N$*) are full column rank,* $1\leqslant r\leqslant R$.

类似地，令：

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_R]$$
$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\dots,\boldsymbol{B}_R]$$
$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{C}_1,\dots,\boldsymbol{C}_R]$$

以张量的矩阵展开形式表示该分解，为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{JK\times I}&=(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})\cdot\mathrm{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{MN\times L},\dots,(\mathcal{D}_R)_{MN\times L})\cdot\mathbf{A}^T,\\
\mathbf{T}_{KI\times J}&=(\mathbf{C}\odot\mathbf{A})\cdot\mathrm{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{NL\times M},\dots,(\mathcal{D}_R)_{NL\times M})\cdot\mathbf{B}^T,\\
\mathbf{T}_{IJ\times K}&=(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})\cdot\mathrm{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{LM\times N},\dots,(\mathcal{D}_R)_{LM\times N})\cdot\mathbf{C}^T.
\end{aligned}$$

分解的唯一性（essentially unique）可以保证，不考虑下面的不确定因素（trivial indeterminacies）：

- 这些$rank-(L,M,N)$的块项可以被任意排列；
- 矩阵$\boldsymbol{A}_r$可以被右乘一个任意非奇异的矩阵$\boldsymbol{F}_r\in\boldsymbol{K}^{L\times L}$，矩阵$\boldsymbol{B}_r$可以被右乘一个任意非奇异的矩阵$\boldsymbol{G}_r\in\boldsymbol{K}^{M\times M}$，矩阵$\boldsymbol{C}_r$可以被右乘一个任意非奇异的矩阵$\boldsymbol{H}_r\in\boldsymbol{K}^{N\times N}$，只要保证张量$\boldsymbol{\mathcal{D}}_r$被$\boldsymbol{\mathcal{D}}_r\times_1\boldsymbol{F}_r^{-1}\times_2\boldsymbol{G}_r^{-1}\times_3\boldsymbol{H}_r^{-1}$取代；

特殊的BTD

定义：

$$\mathcal{D} = blockdiag(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_R)$$

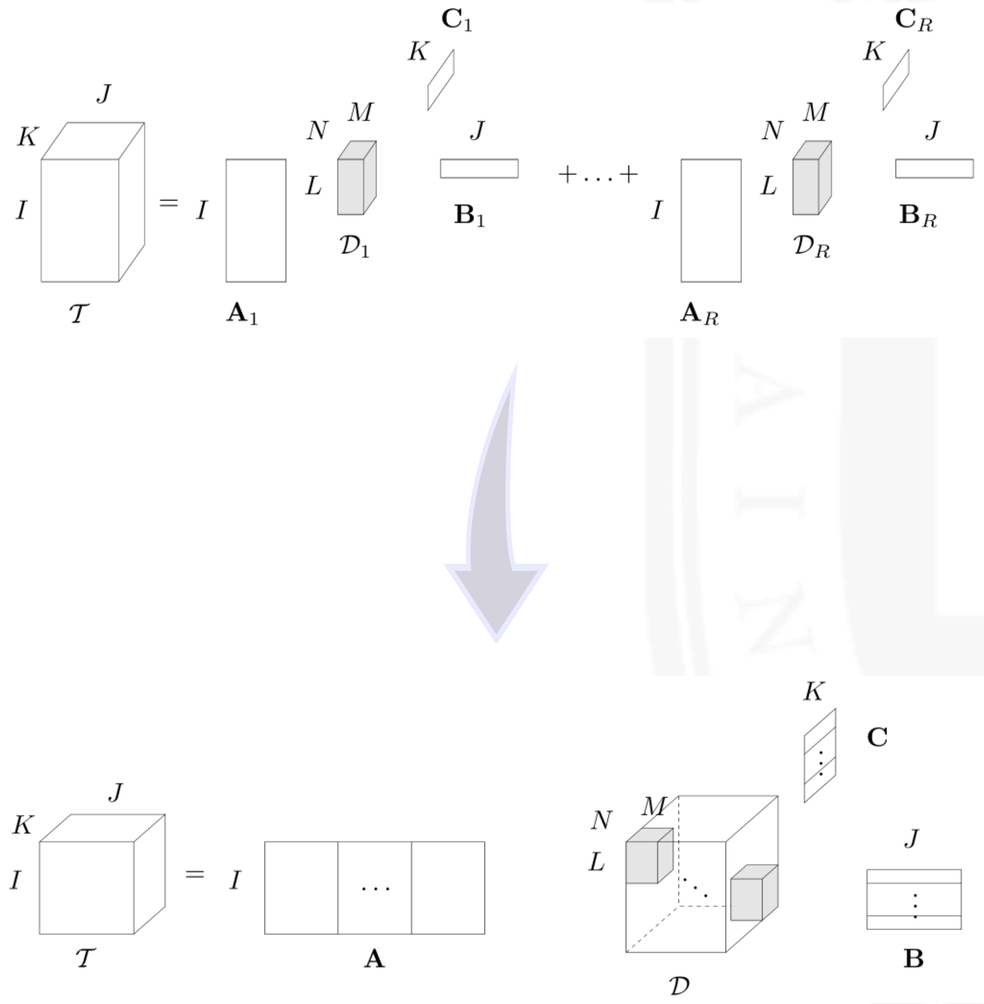
$$A = [A_1, \ldots, A_R]$$

$$B = [B_1, \ldots, B_R]$$

$$C = [C_1, \ldots, C_R]$$

以HOSVD的方式表示$rank-(L, M, N)$分解：

$$\mathcal{T} = \mathcal{D} \bullet_1 \mathbf{A} \bullet_2 \mathbf{B} \bullet_3 \mathbf{C}.$$



rank-(L, M, N) decomposition.

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R} \mathcal{D}_r \times_1 A_r \times_2 B_r \times_3 C_r .$$

$\mathcal{T}$: core tensor. $L \times M \times N$

A_r: $I \times L$ B_r: $J \times M$ C_r: $K \times N$

$D_1 . D_2 , \cdots D_R \rightarrow$ the same size.

$A_1 . A_2 \cdots A_R \rightarrow$ the same size.

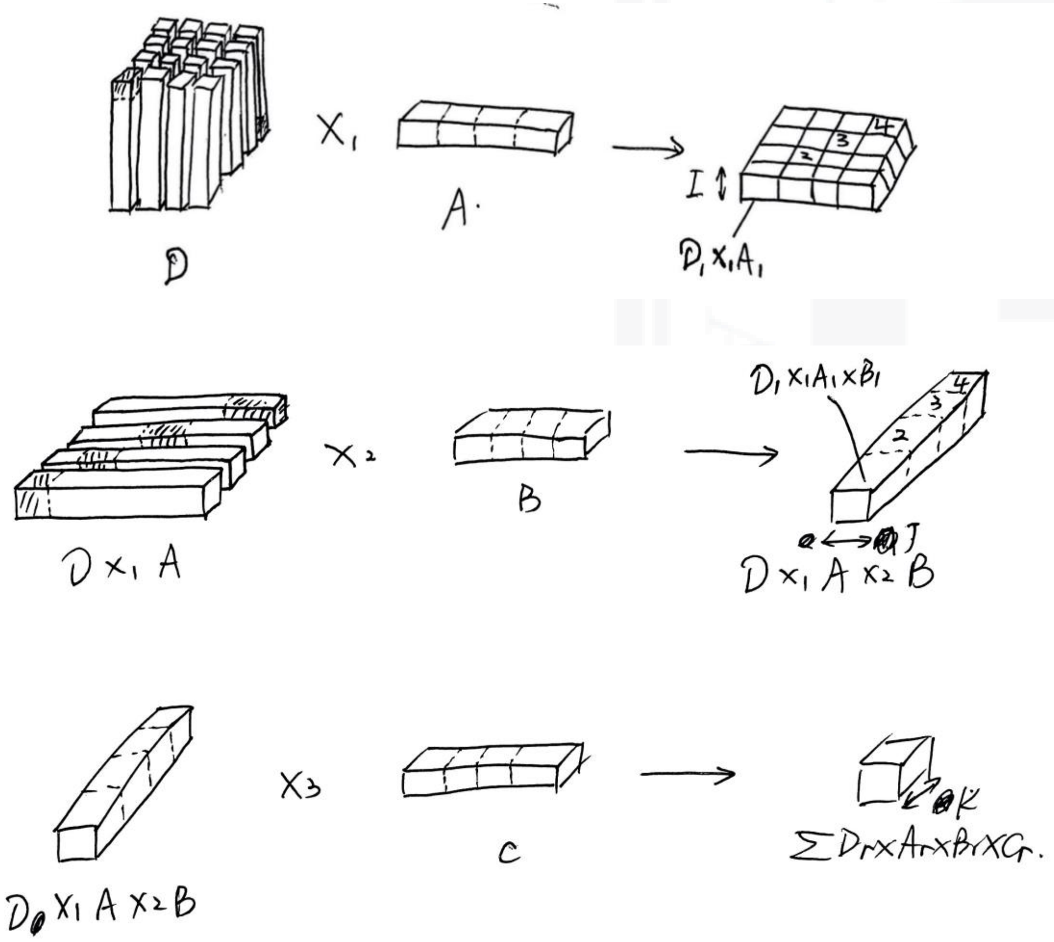
$B_1 . B_2 , \cdots B_R \rightarrow$ the same size.

$C_1 . C_2 \cdots C_R \rightarrow$ the same size.

define:

$\mathcal{D} = \text{blockdiag}(\mathcal{D}_1 . \mathcal{D}_2 , \cdots \mathcal{D}_R)$. $R \times R \times R$.

$A = [A_1 \cdots A_R]$. $1 \times R$. $B \ldots$ $1 \times R$ $C \ldots$ $1 \times R$.



特殊的BTD

- $rank-(L,M,\cdot)$分解

  将张量$\mathcal{T}\in K^{I\times J\times K}$表示为一系列$rank-(L,M,\cdot)$张量的和，即为$rank-(L,M,\cdot)$分解。

DEFINITION 2.4. *A* type-2 decomposition of a tensor $\mathcal{T}\in\mathbb{K}^{I\times J\times K}$ in a sum of rank-$(L,M,\cdot)$ terms *is a decomposition of* $\mathcal{T}$ *of the form*

$$\mathcal{T}=\sum_{r=1}^{R}\mathcal{C}_r\bullet_1\mathbf{A}_r\bullet_2\mathbf{B}_r, \tag{2.16}$$

in which $\mathcal{C}_r\in\mathbb{K}^{L\times M\times K}$ *(with mode-1 rank equal to* L *and mode-2 rank equal to* M*) and in which* $\mathbf{A}_r\in\mathbb{K}^{I\times L}$ *(with* $I\geqslant L$*) and* $\mathbf{B}_r\in\mathbb{K}^{J\times M}$ *(with* $J\geqslant M$*) are full column rank,* $1\leqslant r\leqslant R$.

在文献的定义中，将这种分解描述为一种type-2分解（a type-2 decomposition），这实际上是参考了Tucker-2分解。在上一次汇报中提到过，这是Tucker分解的一种特例。

Tucker分解有一些重要的特例：

- *Tucker2分解：对于三阶张量，固定一个因子矩阵为单位阵。例如，固定 $C=I$，则Tucker2分解为：*

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{G}\times_1\mathbf{A}\times_2\mathbf{B}=[\![\mathfrak{G}\,;\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{I}]\!].$$

- *Tucker1分解：进一步，固定两个因子矩阵为单位阵。例如，固定 $C=I$， $B=I$，则Tucker1分解为：*

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{G}\times_1\mathbf{A}=[\![\mathfrak{G}\,;\mathbf{A},\mathbf{I},\mathbf{I}]\!].$$

这与标准的二维PCA（主成分分析）相同，因为：

$$\mathbf{X}_{(1)}=\mathbf{A}\mathbf{G}_{(1)}.$$

特殊的BTD

令：

$$A = [A_1, \dots, A_R]$$
$$B = [B_1, \dots, B_R]$$

以张量的矩阵展开形式表示该分解，为：

$$\mathbf{T}_{IJ\times K} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} (\mathcal{C}_1)_{(LM\times K)} \\ \vdots \\ (\mathcal{C}_R)_{(LM\times K)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{JK\times I} = [(\mathcal{C}_1 \bullet_2 \mathbf{B}_1)_{JK\times L} \ \dots \ (\mathcal{C}_R \bullet_2 \mathbf{B}_R)_{JK\times L}] \cdot \mathbf{A}^T,$$
$$\mathbf{T}_{KI\times J} = [(\mathcal{C}_1 \bullet_1 \mathbf{A}_1)_{KI\times M} \ \dots \ (\mathcal{C}_R \bullet_1 \mathbf{A}_R)_{KI\times M}] \cdot \mathbf{B}^T.$$

定义：$\mathcal{C} \in K^{LR\times MR\times K}$是一个全零张量，

除了下面这些元素：

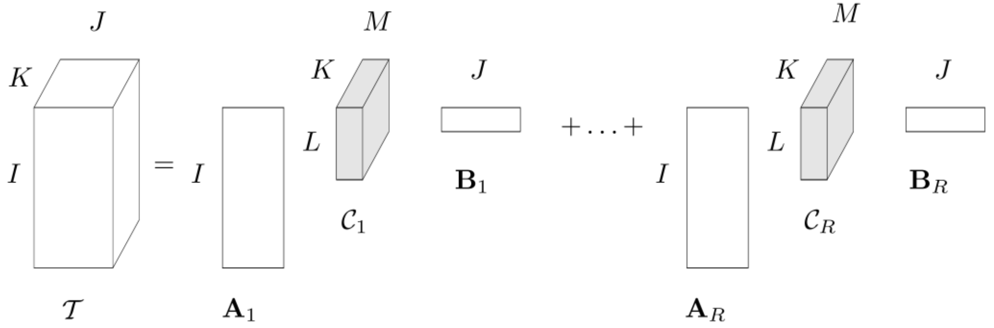
$$(\mathcal{C})_{(r-1)L+l,(r-1)M+m,k} = (\mathcal{C}_r)_{lmk} \quad \forall l, m, k, r.$$

则分解可以被写为：

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} \bullet_1 \mathbf{A} \bullet_2 \mathbf{B}.$$

分解的唯一性（essentially unique）可以保证，不考虑下面的不确定因素（trivial indeterminacies）：

- 这些$rank-(L, M, \cdot)$的块项可以被任意排列；
- 矩阵A_r可以被右乘一个任意非奇异的矩阵$F_r \in K^{L\times L}$，矩阵B_r可以被右乘一个任意非奇异的矩阵$G_r \in K^{M\times M}$，只要保证张量$\mathcal{C}_r$被$\mathcal{C}_r \times_1 F_r^{-1} \times_2 G_r^{-1}$取代；



BTD求解

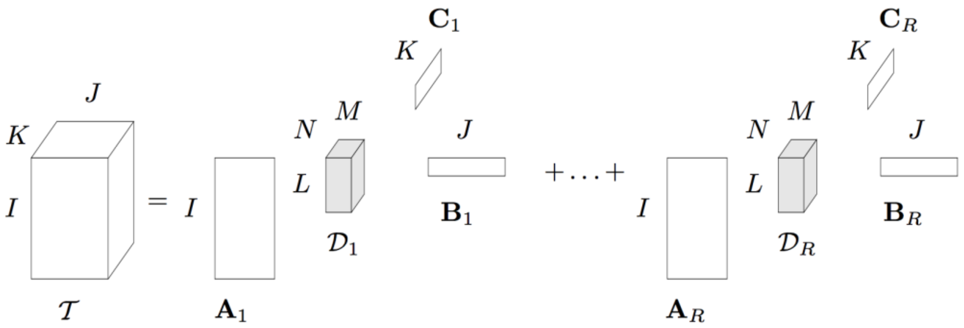
BTD现在的求解算法有很多，比如非线性最小二乘法，交替最小二乘算法（ALS），张量对角算法等，其中交替最小二乘算法形式最为简单。

- $rank-(L,M,N)$分解

以三阶张量$\mathcal{T}\in\mathbb{R}^{I\times J\times K}$为例，定义：

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_R]$$

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\dots,\boldsymbol{B}_R]$$



将张量写为矩阵的形式，BTD如下表达式：

$$\boldsymbol{T}_{JK\times L}=(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})\cdot Blockdiag\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_{1(MN\times L)},\dots\boldsymbol{\mathcal{D}}_{R(MN\times L)}\right)\boldsymbol{A}^T$$

$$\boldsymbol{T}_{KI\times J}=(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A})\cdot Blockdiag\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_{1(NL\times M)},\dots\boldsymbol{\mathcal{D}}_{R(NL\times M)}\right)\boldsymbol{B}^T$$

$$\boldsymbol{T}_{IJ\times K}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\cdot Blockdiag\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_{1(LM\times N)},\dots\boldsymbol{\mathcal{D}}_{R(LM\times N)}\right)\boldsymbol{C}^T$$

将张量写为矢量的形式，得到如下表达式：

$$\mathbf{t}_{IJK}=(\mathbf{A}\odot\mathbf{B}\odot\mathbf{C})\cdot\begin{pmatrix}(\mathcal{D}_1)_{LMN}\\ \vdots\\ (\mathcal{D}_R)_{LMN}\end{pmatrix}$$

当更新某一个因子矩阵或者张量的时候，固定其它元素即可进行求解。如当求解$\boldsymbol{A}$时，固定$\boldsymbol{\mathcal{D}}_r$和$\boldsymbol{B}$以及$\boldsymbol{C}$，令：

$$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})\cdot Blockdiag\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}_{1(MN\times L)},\dots\boldsymbol{\mathcal{D}}_{R(MN\times L)}\right)$$

因此，得到$\boldsymbol{A}$的更新规则为：

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{M}^{\dagger}\cdot\boldsymbol{T}_{JK\times L}\right)^T$$

BTD求解

同理可以得到其它矩阵或者张量的更新规则。因此采用ALS算法求解BTD（$rank-(L,M,N)$分解）的步骤如下（算法中的QR分解是为了防止算法出现数值计算错误）：

- Initialize $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathcal{D}$
- Iterate until convergence:
  1. Update $\mathbf{A}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)^{\dagger}_{MN\times L}, \ldots, (\mathcal{D}_R)^{\dagger}_{MN\times L}) \cdot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C})^{\dagger} \cdot \mathbf{T}_{JK\times I}\right]^T$$

     For $r = 1, \ldots, R$: QR-factorization: $\tilde{\mathbf{A}}_r = \mathbf{QR}$, $\mathbf{A}_r \leftarrow \mathbf{Q}$
  2. Update $\mathbf{B}$:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left[\text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)^{\dagger}_{NL\times M}, \ldots, (\mathcal{D}_R)^{\dagger}_{NL\times M}) \cdot (\mathbf{C} \odot \mathbf{A})^{\dagger} \cdot \mathbf{T}_{KI\times J}\right]^T$$

     For $r = 1, \ldots, R$: QR-factorization: $\tilde{\mathbf{B}}_r = \mathbf{QR}$, $\mathbf{B}_r \leftarrow \mathbf{Q}$
  3. Update $\mathbf{C}$:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \left[\text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)^{\dagger}_{LM\times N}, \ldots, (\mathcal{D}_R)^{\dagger}_{LM\times N}) \cdot (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{\dagger} \cdot \mathbf{T}_{IJ\times K}\right]^T$$

     For $r = 1, \ldots, R$: QR-factorization: $\tilde{\mathbf{C}}_r = \mathbf{QR}$, $\mathbf{C}_r \leftarrow \mathbf{Q}$
  4. Update $\mathcal{D}$:

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{D}_1)_{LMN} \\ \vdots \\ (\mathcal{D}_R)_{LMN} \end{pmatrix} \leftarrow (\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \odot \mathbf{C})^{\dagger} \cdot \mathbf{t}_{IJK}$$

BTD求解

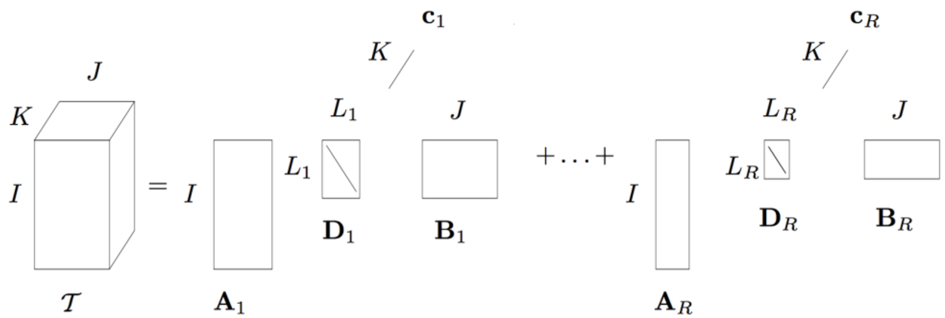
➢ $rank-(L_r, L_r, 1)$分解

$$\mathcal{T}=\sum_{r=1}^{R}(\mathbf{A}_r\cdot\mathbf{B}_r^T)\circ\mathbf{c}_r$$

其中，$\boldsymbol{A}_r\in\boldsymbol{K}^{I\times L_r}$，$\boldsymbol{B}_r\in\boldsymbol{K}^{J\times L_r}$，都是秩为$L_r$的矩阵，$r=1,\dots,R$.

以三阶张量$\mathcal{T}\in\mathbb{R}^{I\times J\times K}$为例，定义：

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_R]$$
$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\dots,\boldsymbol{B}_R]$$
$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_R]$$



将张量写为矩阵的形式，得到如下表达式：

$$\mathbf{T}_{IJ\times K}=[(\mathbf{A}_1\odot_c\mathbf{B}_1)\mathbf{1}_{L_1}\ \dots\ (\mathbf{A}_R\odot_c\mathbf{B}_R)\mathbf{1}_{L_R}]\cdot\mathbf{C}^T,$$
$$\mathbf{T}_{JK\times I}=(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}^T,$$
$$\mathbf{T}_{KI\times J}=(\mathbf{C}\odot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}^T.$$

- Initialize $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$
- Iterate until convergence:
  1. Update $\mathbf{A}$:
  $$\mathbf{A}\leftarrow\left[(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})^\dagger\cdot\mathbf{T}_{JK\times I}\right]^T$$
  2. Update $\mathbf{B}$:
  $$\tilde{\mathbf{B}}=\left[(\mathbf{C}\odot\mathbf{A})^\dagger\cdot\mathbf{T}_{KI\times J}\right]^T$$
  For $r=1,\dots,R$: QR-factorization: $\tilde{\mathbf{B}}_r=\mathbf{QR}$, $\mathbf{B}_r\leftarrow\mathbf{Q}$
  3. Update $\mathbf{C}$:
  $$\tilde{\mathbf{C}}=\left\{[(\mathbf{A}_1\odot_c\mathbf{B}_1)\mathbf{1}_{L_1}\ \dots\ (\mathbf{A}_R\odot_c\mathbf{B}_R)\mathbf{1}_{L_R}]^\dagger\cdot\mathbf{T}_{IJ\times K}\right\}^T$$
  For $r=1,\dots,R$: $\mathbf{c}_r\leftarrow\tilde{\mathbf{c}}_r/\|\tilde{\mathbf{c}}_r\|$

BTD求解

➢ $rank-(L,M,\cdot)$分解

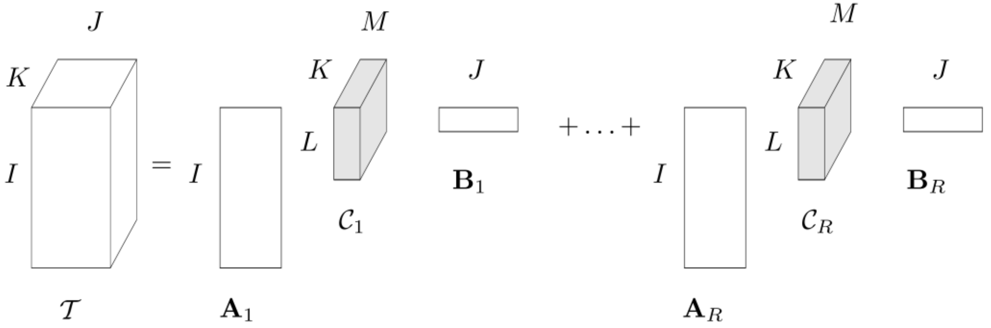
$$\mathcal{T}=\sum_{r=1}^{R}\mathcal{C}_r \bullet_1 \mathbf{A}_r \bullet_2 \mathbf{B}_r$$

其中，$\boldsymbol{\mathcal{C}}_r \in \boldsymbol{K}^{L\times M\times K}$(with mode − 1 rank equals L，mode − 2 rank equals M)，$\boldsymbol{A}_r \in \boldsymbol{K}^{I\times L}(I \geq L)$，$\boldsymbol{B}_r \in \boldsymbol{K}^{J\times M}(J \geq M)$，都是列满秩的矩阵，$r=1,\ldots,R$.

以三阶张量$\boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{I\times J\times K}$为例，定义：

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_R]$$

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\ldots,\boldsymbol{B}_R]$$



将张量写为矩阵的形式，得到如下表达式：

$$\mathbf{T}_{IJ\times K}=(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})\cdot\begin{pmatrix}(\mathcal{C}_1)_{(LM\times K)}\\ \vdots \\ (\mathcal{C}_R)_{(LM\times K)}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{JK\times I}=[(\mathcal{C}_1\bullet_2\mathbf{B}_1)_{JK\times L}\ \ldots\ (\mathcal{C}_R\bullet_2\mathbf{B}_R)_{JK\times L}]\cdot\mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{T}_{KI\times J}=[(\mathcal{C}_1\bullet_1\mathbf{A}_1)_{KI\times M}\ \ldots\ (\mathcal{C}_R\bullet_1\mathbf{A}_R)_{KI\times M}]\cdot\mathbf{B}^T.$$

- Initialize $\mathbf{B}$, $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_R$
- Iterate until convergence:
  1. Update $\mathbf{A}$:

     $$\tilde{\mathbf{A}}=\left\{[(\mathcal{C}_1\bullet_2\mathbf{B}_1)_{JK\times L}\ \ldots\ (\mathcal{C}_R\bullet_2\mathbf{B}_R)_{JK\times L}]^{\dagger}\cdot\mathbf{T}_{JK\times I}\right\}^T$$

     For $r=1,\ldots,R$: QR-factorization: $\tilde{\mathbf{A}}_r=\mathbf{QR}$, $\mathbf{A}_r\leftarrow\mathbf{Q}$
  2. Update $\mathbf{B}$:

     $$\tilde{\mathbf{B}}=\left\{[(\mathcal{C}_1\bullet_1\mathbf{A}_1)_{KI\times M}\ \ldots\ (\mathcal{C}_R\bullet_1\mathbf{A}_R)_{KI\times M})]^{\dagger}\cdot\mathbf{T}_{KI\times J}\right\}^T$$

     For $r=1,\ldots,R$: QR-factorization: $\tilde{\mathbf{B}}_r=\mathbf{QR}$, $\mathbf{B}_r\leftarrow\mathbf{Q}$
  3. Update $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_R$:

     $$\begin{pmatrix}(\mathcal{C}_1)_{(LM\times K)}\\ \vdots \\ (\mathcal{C}_R)_{(LM\times K)}\end{pmatrix}\leftarrow(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})^{\dagger}\cdot\mathbf{T}_{IJ\times K}$$